Examen blanc de Mathématiques
2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(2;1;4)$, $B(0;3;3)$, $C(4;2;2)$ et $D(0;-3;0)$.

Soit (S) l'ensemble des points M dans l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DM}=0$.

1. (a) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ est une équation cartésienne de (S).
   (b) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1;-1;2)$ et de rayon $R=3$.
2. (a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$, puis en déduire que les points A, B et C définissent un plan.
   (b) Montrer que : $x+2y+2z-12=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer l'aire du triangle ABC.
4. (a) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
   (b) Montrer que le point A est le point de contact de (ABC) et (S).
5. Montrer que : $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (P) passant par O et parallèle au plan (ABC).
6. (a) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r=2\sqrt{2}$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (P).
   (c) Déterminer le centre du cercle (Γ).

Exercice 2

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a=3+3i,\quad b=3-3i,\quad c=6,\quad d=9+3i.$$

1. Montrer que a et b sont des solutions de l'équation :
$$z^2-6z+18=0.$$
2. (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.
   (b) En déduire que :
$$a^4+ib^2+306=0 \quad \text{et que} \quad \frac{a}{b}\in i\mathbb{R}.$$
3. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Prouver que C est l'image de B par t.

4. Vérifier que :
$$\frac{b-c}{a-c} = i,$$
puis en déduire que le quadrilatère $OACB$ est un carré.
5. Soit le point $M'(z')$ image du point $M(z)$ par la rotation r de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   (a) Vérifier que :
   $$z' = -iz + 6 + 6i.$$
   (b) Démontrer que D est l'image de A par la rotation r.
   (c) En déduire la nature du triangle ADC.

Exercice 3

Un sac contient :

3 boules rouges (R)

4 boules noires (N)

3 boules blanches (B)

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules du sac.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : "Obtenir 3 boules de même couleur"
   B : "Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux"
2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues après chaque tirage
   (a) Donner les valeurs possibles de $X(\Omega)$
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X
3. On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant, dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées. Calculer la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 4

1. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:
   $$\frac{x^2+3x-2}{x-2} = x + 5 + \frac{8}{x-2}$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2+3x-2}{x-2}\,dx$$
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 4$$
3. (a) Résoudre l'équation différentielle suivante :
   $$y'' - 6y' + 9y = 0$$

(b) Déterminer la solution h qui satisfait aux conditions :

$$h(0) = 3 \quad \text{et} \quad h'(0) = -1$$

(c) En déduire une primitive de h qui s'annule en 0.

PROBLEM

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

2. a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
   b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$
   c) Démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*), g(x) > 0$
3. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1;2[$

Partie 2

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + \ln(x+1) & \text{pour } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + 1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, puis calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

2. Montrer que

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

puis interpréter géométriquement les résultats obtenus pour $x > 0$

3. a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = \dfrac{e^{-x}g(x)}{x+1}$
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_-^*$, puis montrer que $f'(x)$ et $(x+1)$ ont le même signe
   c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f
4. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

puis étudier les branches infinies de (C_f)

5. Construire la courbe (C_f)
6. Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Partie 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \ln(2) \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Calculer u_1 puis vérifier que $0 < u_1 < u_0 < \alpha$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \alpha$
3. Montrer que (u_n) est décroissante
4. Démontrer que (u_n) est convergente puis calculer sa limite

---

Correction

Corrige exercice 1 :

1. (a) **Équation de** (S) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= (x-2, y-1, z-4) \\ \overrightarrow{DM} &= (x, y+3, z) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM} &= x(x-2) + (y+3)(y-1) + z(z-4) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0 \end{aligned}$$

(b) **Sphère** (S) :

$$\begin{aligned} &(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 4z) = 3 \\ &(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \\ &\text{Centre } \Omega(1; -1; 2),\ \text{Rayon } R = 3 \end{aligned}$$

2. (a) **Produit vectoriel** :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-2, 2, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} \end{aligned}$$

Ce vecteur non nul confirme que A,B,C définissent un plan.

(b) **Plan** (ABC) :

$$-3(x-2) + 6(y-1) + 6(z-4) = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z - 12 = 0$$

3. **Aire du triangle ABC** :

$$\text{Aire}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{9}{2}$$

4. (a) **Tangence** :

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 + 2(-1) + 2(2) - 12|}{3} = 3 = R$$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphere (S)

(b) **Point de contact** :

Appartenance à (ABC) :

$$\text{Équation du plan : } x + 2y + 2z - 12 = 0$$

Pour $A(2, 1, 4)$:

$$2 + 2(1) + 2(4) - 12 = 0$$

Appartenance à (S) :

$$\text{Équation de } (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

Pour $A(2, 1, 4)$:

$$4 + 1 + 16 - 4 + 2 - 16 - 3 = 0$$

Unicité : Le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) (question 4.a), donc leur intersection est réduite à un seul point. Comme A appartient aux deux, c'est le point de contact.

Conclusion :

$$\boxed{A \text{ est le point de contact entre } (ABC) \text{ et } (S)}$$

5. **Plan** (P) :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$x + 2y + 2z + d = 0 \quad \text{parallèle à (ABC)}$$

$$x + 2y + 2z = 0 \quad \text{passant par O}$$

$$\boxed{(P) : x + 2y + 2z = 0}$$

6. (a) **Cercle** (Γ) :

Sphère (S) : centre $\Omega(1, -1, 2)$, rayon $R = 3$.
Plan (P) : $x + 2y + 2z = 0$.

Calcul de la distance $d(\Omega, (P))$:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 + 4|}{3} = 1 < R$$

Donc le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon r avec :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

(b) **Droite** (Δ) :

(Δ) passe par $\Omega(1, -1, 2)$ (centre de (S)).
Elle est perpendiculaire à (P), donc son vecteur directeur est le vecteur normal à (P) : $\vec{n} = (1, 2, 2)$.

Représentation paramétrique :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad (\text{où } t \in \mathbb{R})$$

(c) **Centre de** (Γ) : Le centre de (Γ) est l'intersection de :
La droite (Δ) perpendiculaire à (P) passant par Ω,
Le plan (P).

$$(1 + t) + 2(-1 + 2t) + 2(2 + 2t) = 0$$

$$1 + t - 2 + 4t + 4 + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad 9t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 + (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \\ y = -1 + 2(-\frac{1}{3}) = -\frac{5}{3} \\ z = 2 + 2(-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Centre de } (\Gamma) : \boxed{\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

Corrige exercice 2 :

1. **L'équation** $z^2 - 6z + 18 = 0$

$$a^2 - 6a + 18 = (3 + 3i)^2 - 6(3 + 3i) + 18 = 0$$
$$b^2 - 6b + 18 = (3 - 3i)^2 - 6(3 - 3i) + 18 = 0$$

2. **Forme exponentielle**

(a) **Pour** $a = 3 + 3i$ **:**

$$\text{Module } |a| = 3\sqrt{2},$$
$$a = |a| \left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$a = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a = \boxed{3\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)},$$
$$a = \boxed{3\sqrt{2}e^{i\pi/4}}.$$

Pour $b = 3 + 3i$ **:**

$$\text{Module } |b| = 3\sqrt{2},$$
$$b = |b|\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$b = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$b = \boxed{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)},$$
$$b = \boxed{3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)},$$
$$b = \boxed{3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}.$$

(b)

$$a = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow a^4 = (3\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 324 \times (-1) = -324$$

$$b = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Rightarrow b^2 = (3\sqrt{2})^2 e^{-i\pi/2} = 18 \times (-i) = -18i$$

$$ib^2 = i \times (-18i) = -18i^2 = 18$$

$$a^4 + ib^2 + 306 = -324 + 18 + 306 = 0$$

$\boxed{a^4 + ib^2 + 306 = 0}$

(c) Démontrons que $\dfrac{a}{b} \in i\mathbb{R}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i$$

$\boxed{\dfrac{a}{b} = i \in i\mathbb{R}}$

3. **Translation** :

Définition de la translation :

$$t : z \mapsto z + a$$

$$z'_B = b + a = (3 - 3i) + (3 + 3i) = 6$$

$$z'_B = c \quad \text{car} \quad c = 6$$

Conclusion :

$$\boxed{c = b + a = 6}$$

4. **Quadrilatère** $OACB$ est un carré car :

$$\frac{b - c}{a - c} = \frac{-3 - 3i}{-3 + 3i} = \frac{1 + i}{1 - i} = i$$

$$OA = |3+3i| = 3\sqrt{2},$$
$$OB = |3-3i| = 3\sqrt{2},$$
$$AC = |-3+3i| = 3\sqrt{2},$$
$$BC = |-3-3i| = 3\sqrt{2}.$$

$$\boxed{OA = OB = AC = BC = 3\sqrt{2}}$$

5. **Rotation**

(a) **Formule de la rotation**

Centre : C $(c = 6)$

Angle : $-\dfrac{\pi}{2}$

$$z' = e^{-i\pi/2}(z-6) + 6 = -i(z-6) + 6 = \boxed{-iz + 6 + 6i}$$

(b) **Image de A par la rotation**

$$z'_A = -i(3+3i) + 6 + 6i = 9 + 3i = \boxed{d}$$

(c) **Nature du triangle ADC**

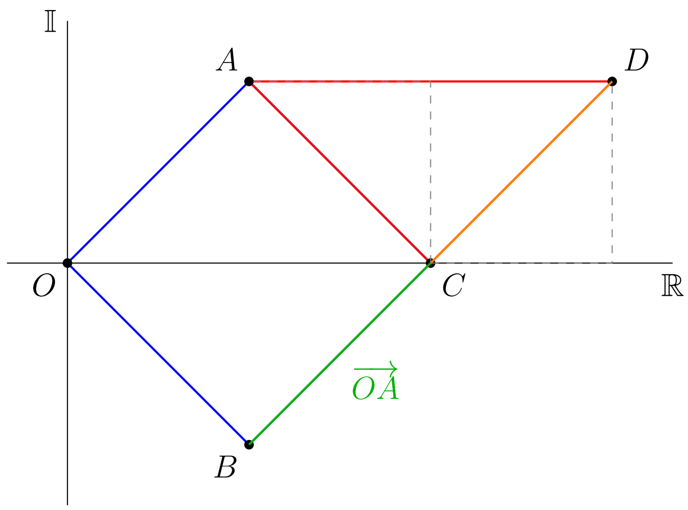
Ona :

$$AD = |6| = 6,$$
$$AC = DC = 3\sqrt{2}.$$

et on a :

$$c - a = 3 - 3i \quad , \quad c - d = -3 - 3i$$
$$\frac{c-a}{c-d} = \frac{3-3i}{-3-3i} = -\frac{1-i}{1+i} = i$$
$$\arg\left(\frac{c-a}{c-d}\right) = \arg(i) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\text{Triangle } ADC \text{ rectangle isocèle en } C}$$



Corrige exercice 3 :

Le sac contient :

3 boules rouges (R)

4 boules noires (N)

3 boules blanches (B)

Total : $3 + 4 + 3 = 10$ boules. On tire simultanément 3 boules.

1. Probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur

   Nombre total de tirages possibles :

   $$C_{10}^3 = 120$$

   Cas favorables :

   3 rouges : $C_3^3 = 1$

   3 noires : $C_4^3 = 4$

   3 blanches : $C_3^3 = 1$

   Total cas favorables : $1 + 4 + 1 = 6$

   Probabilité :

   $$P(A) = \frac{6}{120} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

   Probabilité d'obtenir 3 couleurs différentes

   Cas favorables :

   $$C_3^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 3 \times 4 \times 3 = 36$$

   Probabilité :

   $$P(B) = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

2. Question 2 : Variable aléatoire X

   (a)

   $$X(\Omega) = \boxed{\{1, 2, 3\}}$$

   (b) $P(X = 1) = P(A) = \dfrac{1}{20}$

   $P(X = 3) = P(B) = \dfrac{3}{10}$

   $P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = \boxed{\dfrac{13}{20}}$

3. On répète 4 fois l'expérience avec remise

   Probabilité que A soit réalisé exactement 3 fois :

   $$C_4^3 \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^1 = \boxed{\frac{19}{40000}}$$

Corrige exercice 4 :

1)

a) **on a** :

$$\begin{aligned} x+5+\frac{8}{x-2} &= \frac{(x+5)(x-2)+8}{x-2} \\ &= \frac{x^2-2x+5x-10+8}{x-2} \\ &= \frac{x^2+3x-2}{x-2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'égalité est vérifiée pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.}$

b) **Calcul de l'intégrale** :

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x-2}{x-2}\,dx = \int_0^1 \left(x+5+\frac{8}{x-2}\right)dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{x^2}{2}+5x+8\ln|x-2|\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}+5+8\ln 1\right)-(0+0+8\ln 2) \\ &= \frac{11}{2}-8\ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2+3x-2}{x-2}\,dx = \frac{11}{2}-8\ln 2}$$

2)

Intégration par parties :

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

On pose :

Posons $u=\ln x \Rightarrow u'=\dfrac{1}{x}$

$v'=x^{-1/2} \Rightarrow v=2x^{1/2}$

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} u\,v' &= [uv]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} v\,u' \\ &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}}dx \\ &= (2e\ln e^2 - 0) - \left[4\sqrt{x}\right]_1^{e^2} \\ &= 4e-(4e-4)=4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4}$$

3)

a) **Résolution de l'équation différentielle** :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 = 0$
Solution générale :

$$y(x) = (A + Bx)e^{3x}$$

$\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{3x}}$

b) **Solution particulière** :

$$h(0) = 3 \Rightarrow A = 3$$

$$h'(x) = Be^{3x} + 3(A + Bx)e^{3x}$$

$$h'(0) = -1 \Rightarrow B + 3A = -1 \Rightarrow B = -10$$

$\boxed{h(x) = (3 - 10x)e^{3x}}$

c) **Primitive s'annulant en 0** :

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt = \int_0^x (3 - 10t)e^{3t}dt$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} H(x) &= \left[\frac{3-10t}{3}e^{3t}\right]_0^x + \frac{10}{3}\int_0^x e^{3t}dt \\ &= \frac{3-10x}{3}e^{3x} - 1 + \frac{10}{9}(e^{3x} - 1) \end{aligned}$$

$\boxed{H(x) = \left(1 - \frac{10x}{3} + \frac{10}{9}\right)e^{3x} - \frac{19}{9}}$

Corrige PROBLEM :

Partie 1 :

Soit $g(x) = e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1)

En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$$

2)

a) **Dérivée** :

$$g'(x) = \boxed{e^x - 1}$$

b) **Tableau de variations** :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $g'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Sur $]-\infty, 0[$: g strictement décroissante avec $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$.

Sur $]0, +\infty[$: g strictement croissante avec $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$.

En $x = 0$: $g(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) > 0}$$

3)

Considérons $h(x) = g(x) - x = e^x - 2x - 1$ sur $[1, 2]$:

$h(1) = e - 3 \approx -0.28 < 0$

$h(2) = e^2 - 5 \approx 2.39 > 0$

h continue (car g et $x \mapsto x$ le sont)

$h'(x) = e^x - 2 > 0$ sur $]1, 2[$ (car $e^x > e^1 > 2$) donc il est strictement croissant sur $]1, 2[$

Donc :

$$\boxed{\exists! \alpha \in]1, 2[\text{ tel que } g(\alpha) = \alpha}$$

Partie 2 :

Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} e^{1/x} + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1)

Domaine de définition :

$$D_f = \mathbb{R}$$

Limite en $-\infty$: Posons $t = \frac{1}{x} \to 0^-$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{t\to0^-} te^t = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2)

On a : $f(0) = e^0 + \ln(1) = 1$
Dérivée à gauche : Posons $t = \frac{1}{x} \to -\infty$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}/x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \lim_{t\to -\infty} t^2e^t = 0$$

$$\boxed{f'_g(0) = 0}$$

Dérivée à droite :

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} + \ln(x+1) - 1}{x}$$

on a :

$$f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$$

Et on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$f'_d(0) = -1 + 1 = \boxed{0}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Interpretation : Cf admet un tangent horizontal au point $x_0 = 0$.

3)

a) **Pour** $x > 0$:

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1)e^{-x}+1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^x - (x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^x - x - 1)}{x+1}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-x}g(x)}{x+1}}$$

b) **Pour** $x < 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x}e^{1/x} + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{-1}e^{1/x}\right)' + (1)' \\ &= -x^{-2}e^{1/x} + x^{-1}e^{1/x}(-x^{-2}) + 0 \\ &= -\frac{e^{1/x}}{x^2} - \frac{e^{1/x}}{x^3} \\ &= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{e^{1/x}}{x^3}(-x-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{e^{1/x}(x+1)}{x^3}} \quad \text{pour } x < 0$$

Justification du signe :

$e^{1/x} > 0$ toujours
$x^3 < 0$ car $x < 0$
$-\dfrac{e^{1/x}}{x^3} > 0$ pour $x > 0$
$x + 1$ et $f'(x)$ ont le meme signe

c) **Tableau de variations** :

Pour $x > 0$: $f'(x) > 0$ car $e^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$ pout tout $x > 0$ et $x + 1 > 0$
Pour $x < 0$: $f'(x) = 0$ on $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$		$+\infty$

4)

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{\ln(x+1)(x+1)}{(x+1)x}\right) = 0 + 0 = \boxed{0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}.\frac{(x+1)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}.\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 + 0 = \boxed{0}$$

(Car $e^{-x} \to 0$ et $\frac{\ln X}{X} \to 0$ si on pose $X = x + 1$)

Conclusion : Branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

Et on a :

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x} + 1$$

:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + 1 = \boxed{1}$$

(Car $e^{1/x} \to 1$ et $\dfrac{1}{x} \to 0^-$)

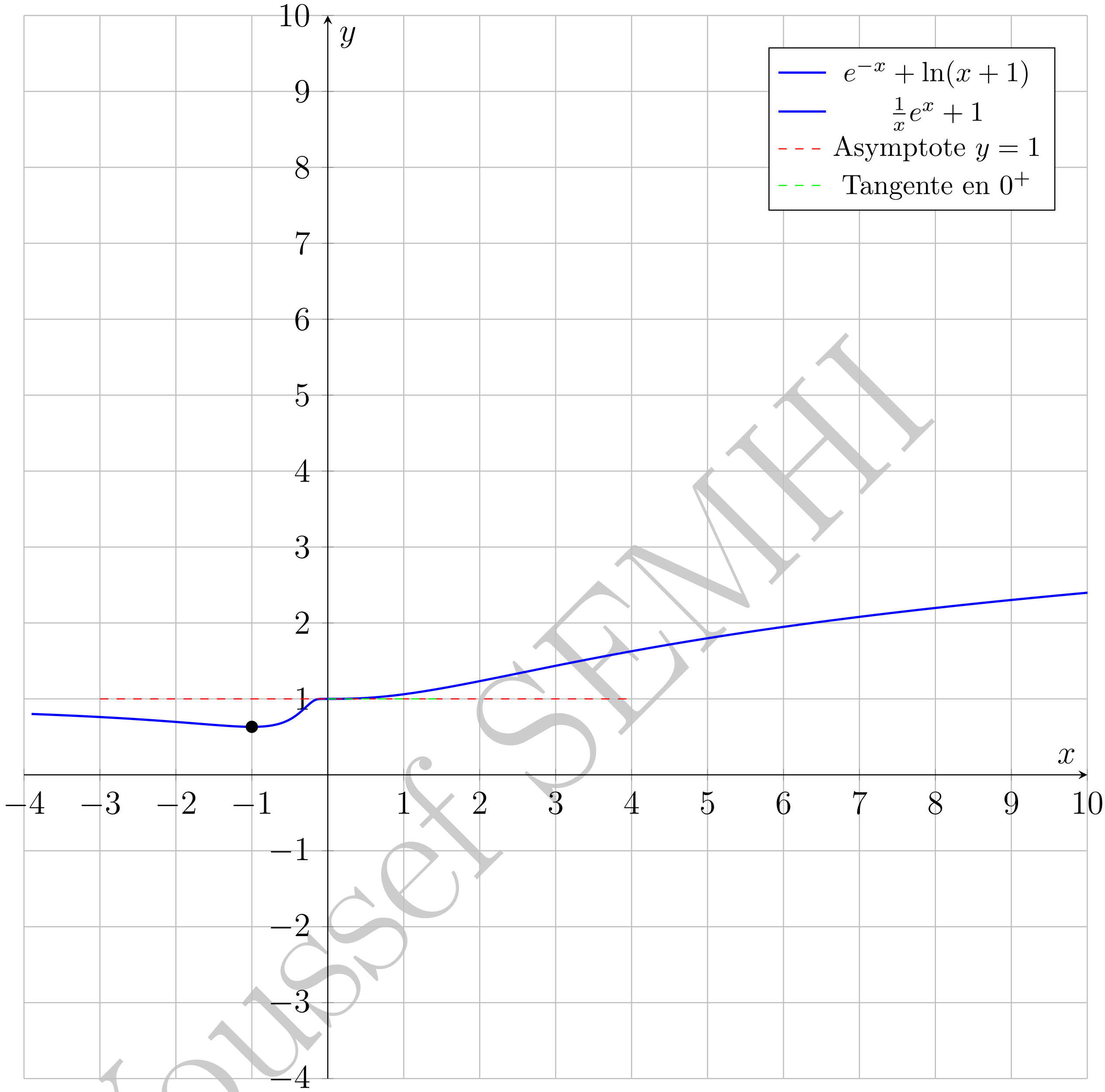
La droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

Position relative :

$$f(x) - 1 = \frac{e^{1/x}}{x} < 0 \quad (\text{car } x < 0)$$

La courbe est **en dessous** de l'asymptote.

5)



6)

$$A = \int_0^1 (e^{-x} + \ln(x+1))dx = \left[-e^{-x} + (x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1 = \boxed{2\ln 2 - \frac{1}{e}}$$

Partie 3

1. Calcul de u_1 et vérification des inégalités

La suite est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \ln(2) \\ u_{n+1} = g(u_n) = e^{u_n} - u_n - 1 \end{cases}$$

Calcul de u_1 :

$$u_1 = g(u_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1 = 2 - \ln(2) - 1 = 1 - \ln(2)$$

on a :

$0 < u_1$: Car $\ln(2) < 1$ donc $1 - \ln(2) > 0$

$u_1 < u_0$: $1 - \ln(2) < \ln(2)$

$u_0 < \alpha$: D'après Partie 1, $\alpha \in]1, 2[$ et g croissante sur $[0, +\infty[$. On a $g(\ln(2)) \approx 0.3069 < \ln(2)$. Comme $g(\alpha) = \alpha > 1$ et g croissante, nécessairement $\ln(2) < \alpha$.

conclusion :

$$0 < u_1 < u_0 < \alpha$$

2)

Par récurrence :
Initialisation $(n = 0)$: $0 < u_0 < \alpha$.
Hérédité : Supposons $0 < u_n < \alpha$ pour un $n \geq 0$.

$u_{n+1} = g(u_n) > 0$ car $g(x) > 0$ pour $x > 0$

$u_{n+1} = g(u_n) < g(\alpha) = \alpha$ car g croissante et $u_n < \alpha$

Conclusion : $0 < u_n < \alpha$ pour touts $n \geq 0$.

3)

Par récurrence :
Initialisation $(n = 0)$: $u_1 < u_0$
Hérédité : Supposons $u_{n+1} < u_n$ pour un $n \geq 0$.

$$u_{n+2} = g(u_{n+1}) < g(u_n) = u_{n+1} \text{ car } g \text{ est croissante}$$

Conclusion : (u_n) est decroissant.

4)

Convergence :

(u_n) décroissante et minorée par 0

Donc, (u_n) converge vers ℓ

Calcul de la limite :

$$\ell = g(\ell)$$

Donc ℓ vérifie $\ell = e^{\ell} - \ell - 1$ soit $\ell = \alpha$ (unique solution dans $]1, 2[$).

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$